

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ У.Д. АЛИЕВА»

Физико-математический факультет

Кафедра алгебры и геометрии

УТВЕРЖДАЮ

И. о. проректора по УР

М. Х. Чанкаев

«29» апреля 2026 г., протокол № 7

Рабочая программа дисциплины

Краевые задачи и вариационное исчисление

(наименование дисциплины (модуля))

Направление подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

(шифр, название направления)

направленность (профиль):

«Системное программирование и компьютерные технологии»

Квалификация выпускника

Бакалавр

Форма обучения

Очная

Год начала подготовки – 2026

Программу составил: *старший преподаватель кафедры алгебры и геометрии Курджиев Ш.М*

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки **01.03.02 Прикладная математика и информатика**, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10.01.2018 № 9 с изменениями и дополнениями от 26.11.2020 г., №1456, 8.02.2021 г., №83, на основании учебного плана подготовки бакалавров по направлению **01.03.02 Прикладная математика и информатика**, направленность (профиль): «Системное программирование и компьютерные технологии», локальных актов КЧГУ.

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры алгебры и геометрии на **2026–2027 учебный год, протокол № 8 от 15 апреля 2026г.**

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Наименование дисциплины (модуля).....	4
2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы	4
3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы	4
4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся	5
5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий	6
6. Основные формы учебной работы и образовательные технологии, используемые при реализации образовательной программы.....	8
7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)	10
7.1. Индикаторы оценивания сформированности компетенций	10
7.2. Перевод балльно-рейтинговых показателей оценки качества подготовки обучающихся в отметки традиционной системы оценивания	11
7.3. Типовые контрольные задания или иные учебно-методические материалы, необходимые для оценивания степени сформированности компетенций в процессе освоения учебной дисциплины	11
7.3.1. Типовые задания к контрольным работам:.....	11
7.3.2. Примерные вопросы к итоговой аттестации	12
7.3.3. Тестовые задания для проверки знаний студентов	14
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)	14
8.1. Основная литература	14
8.2. Дополнительная литература	16
9. Требования к условиям реализации рабочей программы дисциплины (модуля)	16
9.1. Общесистемные требования	16
9.2. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины.....	17
9.3. Необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.....	17
9.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы.....	17
10. Особенности организации образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья	18
11. Лист регистрации изменений	19

1. Наименование дисциплины (модуля)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Целью изучения дисциплины является формирование систематизированных знаний в области краевых задач и методов их решения, а также в области вариационного исчисления и его методов; знакомство с методами исследования математических моделей различных процессов и явлений естествознания, изучение основных методов решения возникающих при этом краевых задач и метод вариации в задачах с неподвижными и подвижными границами и их решение, выяснение физического смысла полученного решения.

Для достижения цели ставятся задачи:

- получить навыки построения математических моделей простейших физических явлений и решения – аналитического и численного - получающихся при этом математических задач;
- изучить необходимый понятийный аппарат дисциплины;
- сформировать умения решать типовые задачи основных разделов дисциплины
- получить необходимые знания из области краевых задач и вариационного исчисления для дальнейшей исследовательской деятельности, самостоятельного освоения научно-технической информации.

2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Данная дисциплина (модуль) относится к Блоку 1.

Дисциплина (модуль) изучается на 4 курсе в 8 семестре.

МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОП ВО	
Индекс	Б1.В.11
Требования к предварительной подготовке обучающегося:	
Для успешного освоения дисциплины студент должен иметь базовую подготовку по элементарной математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям, линейной алгебре, функциональному анализу.	
Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:	
Изучение дисциплины необходимо для успешного освоения дисциплин профессионального цикла и практик, формирующих компетенции ПК-1, ПК-2	

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций обучающегося

Код компетенций	Содержание компетенции в соответствии с ФГОС ВО/ ОП ВО	Индикаторы достижения компетенций
ПК-1.	Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для форми-	ПК-1.1. Знает методологию научных исследований, основные научные понятия и проблемы, существующие в своей профессиональной деятельности ПК-1.2. Умеет самостоятельно анализировать и решать научные, научно-исследовательские задачи в области

	рования выводов по соответствующим научным исследованиям	прикладной математики и ее приложений, а также компьютерных технологий ПК-1.3. Владеет навыками сбора и работы с источниками научной информации.
ПК-2	Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	ПК-2.1. Знает принципы построения и методы исследования математических моделей объектов различной природы. ПК-2.2. Умеет использовать и модифицировать существующие математические методы для решения прикладных задач. ПК-2.3. Владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач.

4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость (объем) дисциплины (модуля) составляет 4 ЗЕТ, 144 академических часов.

Объем дисциплины	Всего часов	
	для очной формы обучения	для заочной формы обучения
Общая трудоемкость дисциплины	144	
Контактная работа обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) * (всего)		
Аудиторная работа (всего):	52	
в том числе:		
лекции	26	
семинары, практические занятия	26	
практикумы		
лабораторные работы		
Внеаудиторная работа:		
курсовые работы		
консультация перед экзаменом		
Внеаудиторная работа также включает индивидуальную работу обучающихся с преподавателем, групповые, индивидуальные консультации и иные виды учебной деятельности, предусматривающие групповую или индивидуальную работу обучающихся с преподавателем), рефераты, контрольные работы и др.		
Самостоятельная работа обучающихся (всего)	56	
Контроль самостоятельной работы	36	
Вид промежуточной аттестации обучающегося (зачет / экзамен)	экзамен	

5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

п/п	Курс/ семестр	Раздел, тема дисциплины	Общая трудо- емкость (в часах)	Виды учебных занятий, включая самостоятель- ную работу обучаю- щихся и трудоемкость (в часах)			
			всего	Аудиторные уч. занятия			Сам. работа
				Лек.	Пр	Лаб.	
Раздел 1. Некоторые сведения из теории дифференциальных уравнений			12	2		4	6
1	4/8	Уравнение Гельмгольца. Разделение переменных уравнения в декартовой системе координат. Разделение переменных уравнения в полярной системе координат. Разделение переменных уравнения в параболической системе координат.	4			2	2
2	4/8	Уравнение Гельмгольца Разделение переменных уравнения в эллиптической системе координат. Разделение переменных уравнения в цилиндрической системе координат. Разделение переменных уравнения в сферической системе координат.	4	2			2
3	4/8	Линейные уравнения второго порядка. Решение диф. уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами. Примеры.	4			2	2
Раздел 2. Краевые задачи. Функция Грина			30	8		10	22
4	4/8	Основные понятия и теоремы. Понятие краевой задачи. Линейный случай. Функция Грина и ее построение.	4	2			2
5	4/8	Исследование нелинейной краевой задачи. Теорема об однозначной разрешимости нелинейной краевой задачи. Теорема о разрешимости нелинейной краевой задачи.	4			2	2
6	4/8	Применение теорем Фредгольма. Для решения краевых задач Пример применения теорем Фредгольма.	4	2			2
7	4/8	Условия разрешимости краевых задач Примеры	4			2	2
8	4/8	Построение функции Грина для задач второго порядка	4				2
9	4/8	Построение функции Грина для задач более высокого порядка	4			2	2
10	4/8	Обобщенная функция Грина. Алгоритм нахождения обобщенной функции Грина для самосопряженного оператора.	4	2			2

11	4/8	Краевые задачи Штурма - Лиувилля Источник задач Штурма - Лиувилля. Краевая задача Штурма - Лиувилля в операторных терминах.	4			2	2
12	4/8	Свойства собственных чисел и собственных функций задачи Штурма - Лиувилля Исследование уравнения свободных колебаний струны	4	2			2
13	4/8	Периодические решения. Периодическая краевая задача. Линейная задача о периодических решениях Нелинейная задача о периодических решениях	4				2
14	4/8	Приближенные методы решения краевых задач. Методы стрельбы. Сеточные методы. Проекционные методы	4			2	2
Раздел 3. Достаточные условия экстремума. Элементы вариационного исчисления			18	6		4	8
15	4/8	Основные понятия вариационного исчисления Постановка некоторых вариационных задач Понятие функционала. Линейный Функционал	2	2			
16	4/8	Непрерывность функционала. Метрики в пространстве функций Определение непрерывности функционала	4			2	2
17	4/8	Первая вариация функционала. Экстремум функционала. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума	4	2			2
18	4/8	Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.	2				2
19	4/8	Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера 1. F не зависит от y' 2. F линейно зависит от y' 3. F зависит только от y' 4. F не зависит от y 5. F не зависит явно от x	2	2			
20	4/8	Алгоритм решения ПЗВИ на минимум Пример применения алгоритма Вопросы	4			2	2
Раздел 4. Элементы вариационного исчисления			32	8		8	16
21	4/8	Задача Больца. Постановка задачи. Алгоритм решения задачи. Пример решения задачи.	4	2			2
22	4/8	Решение некоторых задач вариационного исчисления. Задача о наименьшей поверхности вращения Задача о брахистохроне Геометрическая оптика	4			2	2
23	4/8	Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления Функционалы, зависящие от производных высших порядков. <u>Функционалы, зависящие от нескольких функций</u>	2				2
24	4/8	Условный экстремум функционала. Некоторые связи функций функционала	2	2			

		Изопериметрические задачи. Определение. Примеры.					
25	4/8	Некоторые изопериметрические задачи. Задача о цепной линии Задача Дидоны	4			2	2
26	4/8	Алгоритм решения изопериметрической задачи. Постановка задачи. Алгоритм решения задачи.	2	2			
27	4/8	Задача со старшими производными. Постановка задачи. Алгоритм решения задачи.	2				2
28	4/8	Задача с подвижными концами. Постановка задачи. Алгоритм решения задачи.	4			2	2
29	4/8	Необходимые условия 1-го порядка в ПЗВИ со свободным правым концом	4	2			2
40	4/8	Задача Лагранжа. Постановка задачи. Алгоритм решения задачи.	2				2
Раздел 5. Введение в теорию разрывных задач ВИ			6	2			4
41	4/8	Основные определения и понятия	2	2			
42	4/8	Допустимый класс кривых	4			2	2
46	4/8	Допустимый класс функций. Вариационный функционал	2				2
		Контроль самостоят. работы	36				
ВСЕГО			144	26		26	56

6. Основные формы учебной работы и образовательные технологии, используемые при реализации образовательной программы

Лекционные занятия. Лекция является основной формой учебной работы в вузе, она является наиболее важным средством теоретической подготовки обучающихся. На лекциях рекомендуется деятельность обучающегося в форме активного слушания, т.е. предполагается возможность задавать вопросы на уточнение понимания темы и рекомендуется конспектирование основных положений лекции. Основная дидактическая цель лекции - обеспечение ориентировочной основы для дальнейшего усвоения учебного материала. Лекторами активно используются: лекция-диалог, лекция - визуализация, лекция - презентация. Лекция - беседа, или «диалог с аудиторией», представляет собой непосредственный контакт преподавателя с аудиторией. Ее преимущество состоит в том, что она позволяет привлекать внимание слушателей к наиболее важным вопросам темы, определять содержание и темп изложения учебного материала с учетом особенностей аудитории. Участие обучающихся в лекции – беседе обеспечивается вопросами к аудитории, которые могут быть как элементарными, так и проблемными.

Главной задачей каждой лекции является раскрытие сущности темы и анализ ее основных положений. Рекомендуется на первой лекции довести до внимания студентов структуру дисциплины и его разделы, а в дальнейшем указывать начало каждого раздела (модуля), суть и его задачи, а, закончив изложение, подводить итог по этому разделу, чтобы связать его со следующим. Содержание лекций определяется настоящей рабочей программой дисциплины. Для эффективного проведения лекционного занятия рекомендуется соблюдать последовательность ее основных этапов:

1. формулировку темы лекции;
2. указание основных изучаемых разделов или вопросов и предполагаемых затрат времени на их изложение;

3. изложение вводной части;
4. изложение основной части лекции;
5. краткие выводы по каждому из вопросов;
6. заключение;
7. рекомендации литературных источников по излагаемым вопросам.

Практические занятия. Дисциплины, по которым планируются практические занятия, определяются учебными планами. Практические занятия относятся к основным видам учебных занятий и составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки. Выполнение студентом практических занятий направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам дисциплин математического и общего естественно-научного, общепрофессионального и профессионального циклов;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива. Методические рекомендации разработаны с целью единого подхода к организации и проведению практических занятий.

Практическое занятие — это форма организации учебного процесса, направленная на выработку у студентов практических умений для изучения последующих дисциплин (модулей) и для решения профессиональных задач. Практическое занятие должно проводиться в учебных кабинетах или специально оборудованных помещениях. Необходимыми структурными элементами практического занятия, помимо самостоятельной деятельности студентов, являются анализ и оценка выполненных работ и степени овладения студентами запланированными умениями. Дидактические цели практических занятий: формирование умений (аналитических, проектировочных, конструктивных), необходимых для изучения последующих дисциплин (модулей) и для будущей профессиональной деятельности.

В процессе подготовки к практическим занятиям, обучающимся необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и Интернета, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме. Более глубокому раскрытию вопросов способствует знакомство с дополнительной литературой, рекомендованной преподавателем по каждой теме семинарского или практического занятия, что позволяет обучающимся проявить свою индивидуальность в рамках выступления на данных занятиях, выявить широкий спектр мнений по изучаемой проблеме.

Образовательные технологии. При проведении учебных занятий по дисциплине используются традиционные и инновационные, в том числе информационные образовательные технологии, включая при необходимости применение активных и интерактивных методов обучения.

Традиционные образовательные технологии реализуются, преимущественно, в процессе лекционных и практических занятий. Инновационные образовательные технологии используются в процессе аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов в виде применения активных и интерактивных методов обучения. Информационные образовательные технологии реализуются в процессе использования электронно-библиотечных систем, электронных образовательных ресурсов и элементов электронного

обучения в электронной информационно-образовательной среде для активизации учебного процесса и самостоятельной работы студентов.

1) Практические занятия могут проводиться в форме групповой дискуссии, «мозговой атаки», разборка кейсов, решения практических задач, публичная презентация проекта и др. Прежде, чем дать группе информацию, важно подготовить участников, активизировать их ментальные процессы, включить их внимание, развивать кооперацию и сотрудничество при принятии решений.

7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

7.1. Индикаторы оценивания сформированности компетенций

Компетенции	Высокий уровень (отлично) (86-100% баллов)	Средний уровень (хорошо) (71-85% баллов)	Низкий уровень (удовлетворительно) (56-70% баллов)	Ниже порогового уровня (не удовлетворительно) (до 55 % баллов)
ПК-1. Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	ПК-1.1. В полном объеме знает методологию научных исследований, основные научные понятия и проблемы, существующие в своей профессиональной деятельности	ПК-1.1. Знает методологию научных исследований, основные научные понятия и проблемы, существующие в своей профессиональной деятельности	ПК-1.1. В целом знает методологию научных исследований, основные научные понятия и проблемы, существующие в своей профессиональной деятельности	ПК-1.1. Не знает методологию научных исследований, основные научные понятия и проблемы, существующие в своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2. В полном объеме умеет самостоятельно анализировать и решать научные, научно-исследовательские задачи в области прикладной математики и ее приложений, а также компьютерных технологий	ПК-1.2. Умеет самостоятельно анализировать и решать научные, научно-исследовательские задачи в области прикладной математики и ее приложений, а также компьютерных технологий	ПК-1.2. В целом умеет самостоятельно анализировать и решать научные, научно-исследовательские задачи в области прикладной математики и ее приложений, а также компьютерных технологий	ПК-1.2. Не умеет самостоятельно анализировать и решать научные, научно-исследовательские задачи в области прикладной математики и ее приложений, а также компьютерных технологий
	ПК-1.3. В полном объеме владеет навыками сбора и работы с источниками научной информации.	ПК-1.3. Владеет навыками сбора и работы с источниками научной информации.	ПК-1.3. В целом владеет навыками сбора и работы с источниками научной информации.	ПК-1.3. Не владеет навыками сбора и работы с источниками научной информации.
ПК-2. Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический	ПК-2.1. В полном объеме знает принципы построения и методы исследования математических моделей объектов раз-	ПК-2.1. Знает принципы построения и методы исследования математических моделей объектов различной природы	ПК-2.1. В целом знает принципы построения и методы исследования математических моделей	ПК-2.1. Не знает принципы построения и методы исследования математических моделей объектов

аппарат	личной природы		объектов различной природы	различной природы
	ПК-2.2. В полном объеме умеет использовать и модифицировать существующие математические методы для решения прикладных задач	ПК-2.2. Умеет использовать и модифицировать существующие математические методы для решения прикладных задач	ПК-2.2. В целом умеет использовать и модифицировать существующие математические методы для решения прикладных задач	ПК-2.2. Не умеет использовать и модифицировать существующие математические методы для решения прикладных задач
	ПК-2.3. В полном объеме владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач	ПК-2.3. Владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач	ПК-2.3. В целом владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач	ПК-2.3. Не владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач

7.2. Перевод балльно-рейтинговых показателей оценки качества подготовки обучающихся в отметки традиционной системы оценивания

Порядок функционирования внутренней системы оценки качества подготовки обучающихся и перевод балльно-рейтинговых показателей обучающихся в отметки традиционной системы оценивания проводится в соответствии с положением КЧГУ «Положение о балльно-рейтинговой системе оценки знаний обучающихся», размещенным на сайте Университета по адресу: <https://kchgu.ru/inye-lokalnye-akty/>

7.3. Типовые контрольные задания или иные учебно-методические материалы, необходимые для оценивания степени сформированности компетенций в процессе освоения учебной дисциплины

7.3.1. Типовые задания к контрольным работам:

Критерии оценивания:

- оценка «отлично» выставляется, если безошибочно выполнены все задания;
- оценка «хорошо» выставляется, если выполнены все задания, но допущены ошибки, не влияющие на ход и смысл их решения;
- оценка «удовлетворительно» выставляется, если выполнено правильно хотя бы одно задание работы;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполнено правильно ни одного задания.

КОМПЛЕКТ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВАРИАНТ № 1

1. Исследовать на экстремум функционал

$$J[y(x)] = \int (y^2 + 2xyu')dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

2. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y'')^2 - 2(y')^2 + y^2 - 2y \sin x] dx.$$

3. Найти экстремали изопериметрической задачи $v[y(x)] = \int_0^1 ((y')^2 + x^2) dx$ при условии

$$\int_0^1 y^2 dx = 2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

4. Найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала.

$$v[y(x)] = \int_0^1 (x^3 (y'')^2 + 100xy^2 - 20xy) dx, \quad y(1) = y'(1) = 0.$$

ВАРИАНТ № 2

1. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y') dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

2. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y''')^2 + y^2 - 2yx^3] dx.$$

3. Найти экстремали изопериметрической задачи $v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (y')^2 dx$ при условии

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx = a, \quad \text{где } a - \text{постоянная.}$$

4. Найти приближенное решение задачи о минимуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 ((y')^2 - y^2 - 2xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

7.3.2. Примерные вопросы к итоговой аттестации (экзамен в 8-м семестре)

1. Краевые задачи.
2. Функция Грина краевой задачи.
3. Собственные значения краевой задачи.
4. Предмет вариационного исчисления. Вариация и ее свойства.
5. Необходимое условие экстремума функционала.
6. Простейшая задача вариационного исчисления с неподвижными границами. Уравнение Эйлера. Экстремали.
7. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера.
8. Задача о наименьшей площади поверхности вращения.
9. Задача о брахистохроне.
10. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка.
11. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.
12. Простейшая задача с подвижными границами. Условие трансверсальности.
13. Экстремали с угловыми точками. Задача об отражении экстремалей.
14. Экстремали с угловыми точками. Задача о преломлении экстремалей.
15. Односторонние вариации.
16. Вариационные задачи на условный экстремум. Геометрические связи.
17. Вариационные задачи на условный экстремум. Кинематические связи.
18. Изопериметрические задачи.

19. Достаточные условия экстремума. Поле экстремалей.
20. Условие Якоби включения экстремали в поле экстремалей. Уравнение Якоби.
21. Функция Вейерштрасса. Достаточные условия существования слабого и сильного экстремума.
22. Условия Лежандра существования слабого и сильного экстремума.
23. Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду. Уравнения Гамильтона-Якоби.
24. Задача оптимального управления и ее связь с вариационной задачей.
25. Принцип максимума Понтрягина.
26. Задача о быстродействии.
27. Задача о подъеме ракеты на максимальную высоту.

Критерии оценки устного ответа на вопросы по дисциплине

✓ 5 баллов - если ответ показывает глубокое и систематическое знание всего программного материала и структуры конкретного вопроса, а также основного содержания и новаций лекционного курса по сравнению с учебной литературой. Студент демонстрирует отчетливое и свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией соответствующей научной области. Знание основной литературы и знакомство с дополнительно рекомендованной литературой. Логически корректное и убедительное изложение ответа.

✓ 4 - балла - знание узловых проблем программы и основного содержания лекционного курса; умение пользоваться концептуально-понятийным аппаратом в процессе анализа основных проблем в рамках данной темы; знание важнейших работ из списка рекомендованной литературы. В целом логически корректное, но не всегда точное и аргументированное изложение ответа.

✓ 3 балла – фрагментарные, поверхностные знания важнейших разделов программы и содержания лекционного курса; затруднения с использованием научно-понятийного аппарата и терминологии учебной дисциплины; неполное знакомство с рекомендованной литературой; частичные затруднения с выполнением предусмотренных программой заданий; стремление логически определенно и последовательно изложить ответ.

✓ 2 балла – незнание, либо отрывочное представление о данной проблеме в рамках учебно-программного материала; неумение использовать понятийный аппарат; отсутствие логической связи в ответе.

Образцы задач к билетам

1. Найти норму элемента $y(x)$ в пространстве $C[a, b]$ и $C^1[a, b]$ соответственно

$$y(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}, \quad n = 1, 2, 10, 100, \quad x \in [0, \pi].$$

2. Для функционала

$$V[y(x)] = \int_0^1 xy^2 y' dx$$

положить $y(x) = x^2$, $\delta y(x) = x - 2$ и сравнить δV с ΔV .

3. Найти экстремали функционала, содержащего старшие производные:

$$V[y(x)] = \frac{1}{2} \int_0^1 (y'')^2 dx, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

4. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций

$$V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^3 \sqrt{1 + (y_1')^2 + (y_2')^2} dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -2, \quad y_1(3) = 7, \quad y_2(3) = 1.$$

5. Найти экстремали функционала в задаче с подвижными границами

$$V[y(x)] = \int_0^{x_1} (y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = -x_1 - 1.$$

6. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, на которых может достигаться экстремум функционала $V[y(x)]$ в задаче Лагранжа

$$V[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^{\pi/2} [y_1^2 + y_2^2 - (y_1')^2 - (y_2')^2 + \cos x] dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = -1, \quad y_1 - y_2 - \sin x = 0.$$

7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$V[y] = \int_0^1 (y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad \int_0^1 xy dx = 0.$$

8. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$V[y(x)] = \int_0^a [6(y')^2 - (y')^4] dx,$$

проходящей через точки $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a > 0$, $b > 0$.

9. Исследовать на экстремум функционал

$$V[y(x)] = \int_0^1 e^x [y^2 + \frac{1}{2}(y')^2] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$$

10. Найти методом Ритца приближенное решение задачи об экстремуме функционала:

$$V[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + y^2 + xy] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0, \quad n = 2.$$

7.3.3. Тестовые задания для проверки знаний студентов

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

8.1. Основная литература

1. Белов, Ю. Я. Аппроксимация и корректность краевых задач для дифференциальных уравнений [Электронный ресурс]: учеб. пос. / Ю. Я. Белов, Р. В. Сорокин, И. В. Фроленков. - Красноярск: Сиб. Федер. ун-т, 2012. - 172 с. - ISBN 978-5-7638-2499-5. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/491959> – Режим доступа: по подписке.

2. Бравый, Е. И. О разрешимости периодической краевой задачи для линейного функционально-дифференциального уравнения / Е. И. Бравый. - Текст: электронный // Вестник Удмуртского университета. Серия 1. Математика. Механика. Компьютерные науки. - 2009. - №3. - С. 12-24. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/527054> – Режим доступа: по подписке.

3. Волков, В. Е. Функция Грина самосопряженной краевой задачи второго порядка: учебно-методическое пособие / В. Е. Волков, Е. В. Сумин. — Москва: НИЯУ МИФИ, 2012. — 20 с. — ISBN 978-5-7262-1706-2. — Текст: электронный // Лань: электронно-

библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/75841> — Режим доступа: для авториз. пользователей.

4. Гостеев, Ю. А. Численное решение краевых задач: учебно-методическое пособие / Ю. А. Гостеев. — Новосибирск: НГТУ, 2019. — 66 с. — ISBN 978-5-7782-4075-9. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/152273> — Режим доступа: для авториз. пользователей.

5. Жидков, А. А. Математические основы современной теории краевых задач для уравнений с частными производными: учебно-методическое пособие / А. А. Жидков, А. В. Калинин, А. А. Тюхтина. — Нижний Новгород: ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2012. — 82 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/153488> — Режим доступа: для авториз. пользователей.

6. Киселев, В. Ю. Вариационное исчисление и теория оптимального: учебное пособие / В. Ю. Киселев. - Москва; Вологда: Инфра-Инженерия, 2023. - 132 с. - ISBN 978-5-9729-1416-6. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/2092472> — Режим доступа: по подписке.

7. Коган, Е. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учебное пособие / Е. А. Коган. — Москва: ИНФРА-М, 2020. — 293 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-015817-4. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1058922> — Режим доступа: по подписке.

8. Кучер, Н. А. Краевые задачи для эллиптических систем уравнений на плоскости: учебное пособие / Н. А. Кучер. — Кемерово: КемГУ, 2009. — 94 с. — ISBN 978-5-8353-0930-6. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/30155> — Режим доступа: для авториз. пользователей.

9. Кучер, Н. А. Нелинейные краевые задачи на плоскости: учебное пособие / Н. А. Кучер, О. В. Малышенко. — Кемерово: КемГУ, 2012. — 116 с. — ISBN 978-5-8353-1338-9. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/44355> — Режим доступа: для авториз. пользователей.

10. Лебедев, К. А. Вариационное исчисление: учебное пособие / К. А. Лебедев. - Москва; Вологда: Инфра-Инженерия, 2023. - 220 с. - ISBN 978-5-9729-1224-7. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/2092471> — Режим доступа: по подписке.

11. Применение интегралов типа коши при решении краевых задач: учебно-методическое пособие / составитель В.Е. Петрова. — Воронеж: ВГУ, 2010 — Часть 1 — 2010. — 45 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/357662> — Режим доступа: для авториз. пользователей.

12. Тептин, А. Л. О знаке функции Грина краевой задачи с периодическими и штурмовскими краевыми условиями / А. Л. Тептин. - Текст: электронный // Вестник Удмуртского университета. Серия 1. Математика. Механика. Компьютерные науки. - 2008. - №2. - С. 150-151. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/499540> — Режим доступа: по подписке.

13. Файншмидт, В. Л. Ортогональные функции и краевые задачи: учебное пособие / В. Л. Файншмидт. — Санкт-Петербург: БГТУ "Военмех" им. Д.Ф. Устинова, 2021. — 58 с. — ISBN 978-5-907324-38-1. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/220253> - Режим доступа: для авториз. пользователей.

14. Функция Грина краевых задач для уравнения Пуассона: учебно-методическое пособие / составители А. Т. Астахов [и др.]. — Воронеж: ВГУ, 2014. — 36 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/356969> — Режим доступа: для авториз. пользователей.

8.2. Дополнительная литература

1	Алексеев В.М	Оптимальное управление	М.: Физматлит, 2005
2.	Андреева Е.А..	Вариационное исчисление и методы оптимизации	М.: Высшая школа, 2006 - 583 с.
3.	Васильева А.Б.	Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах.	М.: Физматлит, 2003. - 432 с.
4.	Зеленский К.Х., Игнатенко В.Н., Коц А.П.	Компьютерные методы прикладной математики	Киев: Дизайн В, 1999
5	Краснов М.Л.	Вариационное исчисление: задачи и упражнения: учебное пособие для втузов.	М.: Наука, 1973. - 190 с.
6	Краснов М.Л.	Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие для втузов.	М.: Едиториал УРСС, 2002. - 166 с.
7.	Кузнецов Ю.А., Семенов А.И.	Избранные главы вариационного исчисления.	Электронное учебно - методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского, 2012
8	Пантелеев А.В.	Вариационное исчисление в примерах и задачах: Учебное пособие.	М: Изд-во МАИ. 2000 -228 с.
9.	Пантелеев А.В.	Методы оптимизации в примерах и задачах: Учебное пособие. 2-е изд., исправленное.	М.: Высшая школа, 2005. - 544 с.
10	Самарский А.А.	Теория разностных схем	М.: Наука, 1989
11	Цаф Л.Я.	Вариационное исчисление и интегральные уравнения: справочное руководство. - 3-е изд., стереотипное	СПб.: Лань, 2005. - 192 с.
12	Эльсгольц Л.Э.	Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: Учебник для физ. спец. ун-тов.	М.: Наука, 1969. - 424 с.
13	Эльсгольц Л.Э.	Вариационное исчисление: учебник для физических и физико-математических факультетов университетов	М.: URSS, 2008. - 205 с.

9. Требования к условиям реализации рабочей программы дисциплины (модуля)

9.1. Общесистемные требования

Электронная информационно-образовательная среда ФГБОУ ВО «КЧГУ»

Каждый обучающийся в течение всего периода обучения обеспечен индивидуальным неограниченным доступом к электронной информационно-образовательной среде (ЭИОС) Университета из любой точки, в которой имеется доступ к информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», как на территории Университета, так и вне ее.

Функционирование ЭИОС обеспечивается соответствующими средствами информационно-коммуникационных технологий и квалификацией работников, ее использующих и

поддерживающих. Функционирование ЭИОС соответствует законодательству Российской Федерации.

Адрес официального сайта университета: <http://kchgu.ru>.

Адрес размещения ЭИОС ФГБОУ ВО «КЧГУ»: <https://do.kchgu.ru>.

Электронно-библиотечные системы (электронные библиотеки)

Учебный год	Наименование документа с указанием реквизитов	Срок действия документа
2026-2027 учебный год	Электронно-библиотечная система ООО «Знаниум». Договор № 332 эбс с 02.06.2026г. Электронный адрес: https://znanium.com	С 02.06.2026г. до 01.06.2027г.
2026-2027 учебный год	Электронно-библиотечная система «Лань». Договор № 12 от 26.02.26г. Электронный адрес: https://e.lanbook.com	от 26.02.2026г. до 31.01.2027г.
2026-2027 учебный год	Электронно-библиотечная система КЧГУ. Положение об ЭБ утверждено Ученым советом от 30.09.2015г. Протокол № 1. Электронный адрес: http://lib.kchgu.ru	Бессрочный
2026-2027 учебный год	Национальная электронная библиотека (НЭБ). Договор №101/НЭБ/1391-п от 22. 02. 2023 г. Электронный адрес: http://rusneb.ru	Бессрочный
2026-2027 учебный год	Научная электронная библиотека «ELIBRARY.RU». Лицензионное соглашение №15646 от 21.10.2016 г. Электронный адрес: http://elibrary.ru	Бессрочный
2026-2027 учебный год	Электронный ресурс Polpred.com Обзор СМИ. Соглашение. Бесплатно. Электронный адрес: http://polpred.com	Бессрочный

9.2. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины

Занятия проводятся в учебных аудиториях, предназначенных для проведения занятий лекционного и практического типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в соответствии с расписанием занятий по образовательной программе. С описанием оснащённости аудиторий можно ознакомиться на сайте университета, в разделе материально-технического обеспечения и оснащённости образовательного процесса по адресу: <https://kchgu.ru/sveden/objects/>

9.3. Необходимый комплект лицензионного программного обеспечения

- Microsoft Windows (Лицензия № 60290784), бессрочная
- Microsoft Office (Лицензия № 60127446), бессрочная
- ABBY FineReader (лицензия № FCRP-1100-1002-3937), бессрочная
- CalculateLinux (внесён в ЕРПП Приказом Минкомсвязи №665 от 30.11.2018-2020), бессрочная
- Google G Suite for Education (IC: 01i1p5u8), бессрочная
- Kaspersky Endpoint Security. Договор №0379400000325000001/1 от 28.02.2025г. Срок действия лицензии с 27.02.2025г. по 07.03.2027г.

9.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Федеральный портал «Российское образование» - <https://edu.ru/documents/>
2. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (Единая коллекция ЦОР) – <http://school-collection.edu.ru/>
3. Базы данных Scopus издательства Elsevier <http://www.scopus.com/search/form.uri?display=basic>.
4. Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования - <http://fgosvo.ru>.
5. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов (ФЦИОР) – <http://edu.ru>.
6. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (Единая коллекция ЦОР) – <http://school-collection.edu.ru>.
7. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» (ИС «Единое окно») – <http://window/edu.ru>.

10. Особенности организации образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья

В ФГБОУ ВО «Карачаево-Черкесский государственный университет имени У.Д. Алиева» созданы условия для получения высшего образования по образовательным программам обучающихся с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ).

Специальные условия для получения образования по ОПВО обучающимися с ограниченными возможностями здоровья определены «Положением об обучении лиц с ОВЗ в КЧГУ», размещенным на сайте Университета по адресу: <http://kchgu.ru>.

11. Лист регистрации изменений

Изменение	Дата и номер протокола ученого совета факультета/ института, на котором были рассмотрены вопросы о необходимости внесения изменений в ОПВО	Дата и номер протокола ученого совета Университета, на котором были утверждены изменения в ОПВО
Обновлен договор №332 эбс ООО «Знаниум» от 02.06.2026г. Дей- ствует с 02.06.2026г. до 01.06.2027г.		03.06.2026г., протокол № 8